# Daglengte

22 december, de kortste dag, nog geen 8 uur. Maar van nu af gaan de dagen lengen; eerst heel langzaam, maar allengs sneller. En rond 21 maart is elke dag welhaast mekrbaar langer dan de vorige. Tot zo tegen eind mei de dagen op zijn langst zijn, en dat een maand of twee blijven, waarna het korten weer merkbaar wordt. Hoe zit dat precies?

## 1 Nederland

We weten dat de hoogte van de zon, en daarmee de lengte van de dag, bij benadering een sinusfuctie van de tijd is, en enkele handige waarden van de sinus zijn:

| hoek (graden): | 0 | 30 | 60 | 90 |
|---|---|---|---|---|
| sinus: | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 |
| sinus afgerond: | 0 | 0.50 | 0.87 | 1 |

Een volledige periode van de sinus gaat van 0 tot 360 graden, de intervallen in bovenstaande tabel zijn dus steeds een twaalfde van de volledige periode. We verdelen nu ook het jaar in twaalf gelijke perioden van 30 à 31 dagen, zie onderstaande tabel. De sinus moeten we vervolgens trasformeren, en wel als volgt. De korste dag in Nederland is 7 uur en 42 minuten, maar voor het gemak nemen we 8 uur. Voor de langste nemen we 16 uur. Gemiddeld is de dag dan 12 uur, en dat is hij op 21 maart en op 21 september. Er is dus een afwijking van 4 uur, zowel naar boven als naar beneden, ten opzichte van het gemiddelde. De daglengten worden dus:

12 , $\quad 12 \pm 0,50 \times 4 = 12 \pm 2$ , $\quad 12 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} \times 4 = 12 \pm 3,46 \quad$ en $\quad 12 \pm 4$.

Dat levert de volgende tabel.

| datum | daglengte | | relatief |
|---|---|---|---|
| | uur | min | verschil % |
| 21 maart | 12 | | |
| 21 april | 14 | | +50 |
| 21 mei | 15 | 28 | +37 |
| 21 juni | 16 | | +13 |
| 21 juli | 15 | 28 | -13 |
| 21 augustus | 14 | | -37 |
| 21 september | 12 | | -50 |
| 21 oktober | 10 | | -50 |
| 21 november | 8 | 32 | -37 |
| 22 december | 8 | | -13 |
| 21 januari | 8 | 32 | +13 |
| 20 februari | 10 | | +37 |
| 21 maart | 12 | | +50 |

De percentages in laatste kolom van de tweede tabel zijn steeds het verschil van de daglengte in de betreffende maand met die van de vorige maand, ten opzichte van de gemiddelde daglengte:

$$\text{relatief verschil} = \frac{\text{daglengte} - \text{daglengte vorige maand}}{\text{gemiddelde daglengte}} \times 100$$

We zien dat de eerste maand na 22 december er weinig (13%) verandering is. Dan volgen vier maanden van sterke toename, 37, 50, 50 en 37%. Van 21 mei tot 21 juli zijn de dagen ongeveer evenlang, te weten 15,5 à 16 uur. Dan volgen vier maanden van sterke afname. En van 22 november tot 21 januari zijn ze ongeveer evenkort, 8 à 8,5 uur.

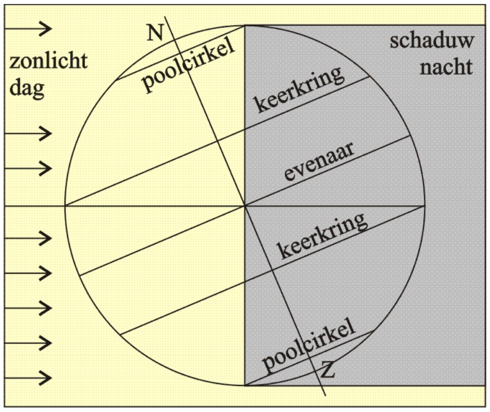
Tenslotte: rond 21 maart en 21 september bedraagt de verandering per *dag* ruim 4 minuten, rond 21 juni en 22 december slechts 2 *seconden*!

## 2 Algemeen

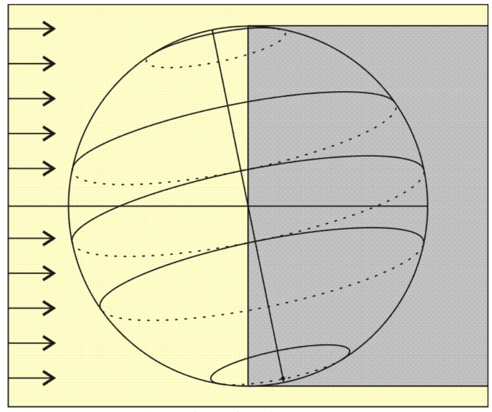
Hoe zit dat in andere delen van de wereld? Op de polen is het een half jaar dag, en vervolgens een half jaar nacht. Op de evenaar duren alle dagen en alle nachten 12 uur. Boven de noordelijke poolcirkel en ten zuiden van de zuidelijke gaat 's-zomers de zon niet onder, en komt hij 's-winters niet op. In de volgende figuren is geprobeerd schematisch aan te geven hoe dag en nacht zich verhouden op de verschillende breedten.

# De lengte van dag en nacht op de verschillende breedten

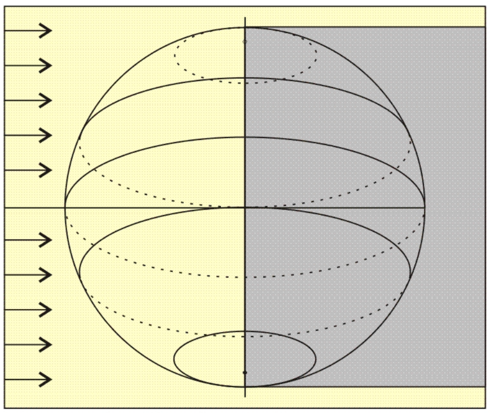
(de schuine lijnen zijn benaderingen, in werkelijkheid zijn dat sinusachtige lijnen)



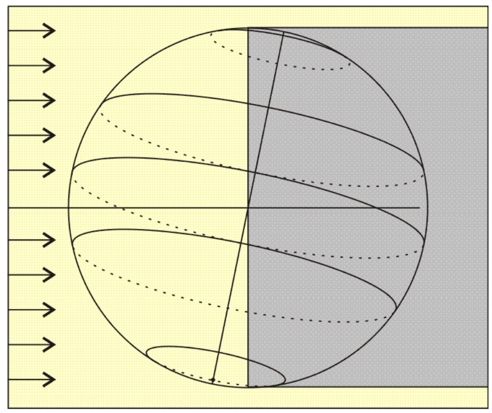

21 juni



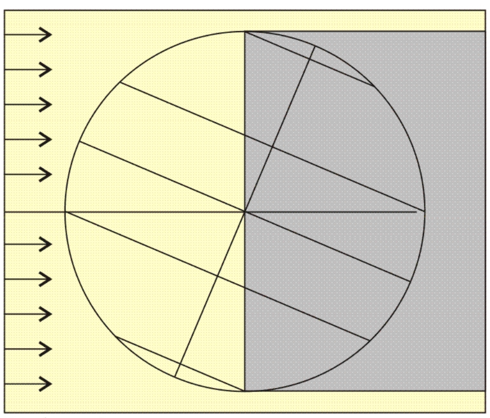
15 augustus, Noordpool achter



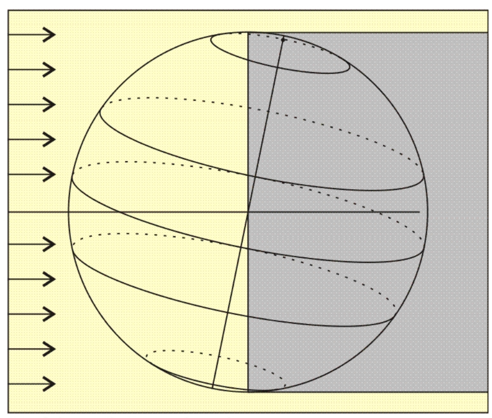
21 september, Noordpool achter



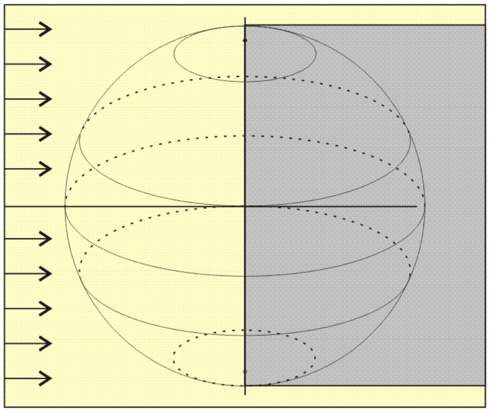
15 november : Noordpool achter



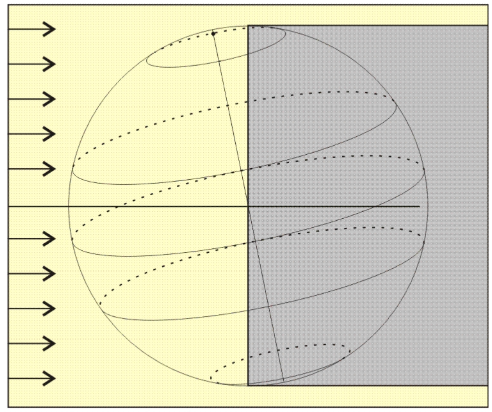
21 december



15 februari, Noordpool voor



21 maart, Noordpool voor

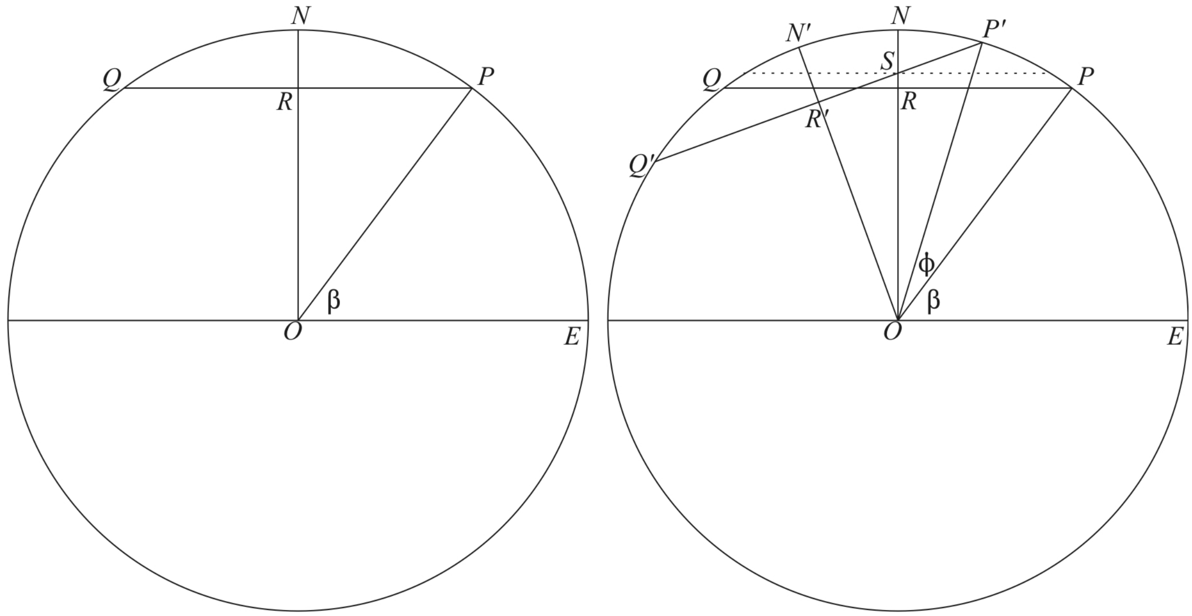


15 mei, Noordpool voor

# 3 Wiskundige achtergrond

Hoe zien de poolcirkels, de evenaar en de keerkringen eruit, vanaf de zon?

Dat hangt af van het jaargetijde. Daar de as van de aarde op elk tijdstip naar eenzelfde vast punt op de hemelbol wijst, lijkt het vanaf de zon alsof de as in de loop van een jaar een kegel beschrijft. Afhankelijk van het jaargetijde doen zich voornoemde cirkels voor als ellipsen met varierende breedte en hoogte. De hoogte kan zelfs nul worden.




We denken ons een assenstelsel waarvan $x = OE$, $z = ON$, $y$ loodrecht op het vlak van tekening. De straal van de aarde is 1 eenheid. Gegeven een punt $P$ op aarde op geografische breedte $\beta$. $PQ$ is een breedtecirkel met middelpunt $R$. $N$ is de noordpool.

We gaan deze figuur draaien om $O$ over een kleine hoek $\phi$, waardoor de geaccenteerde punten ontstaan. $S$ is het snijpunt van $ON$ en $P'Q'$. De stippellijn heeft de lengte van doorsnede van de nieuwe breedtecirkel en vlak $yz$. De halve lengte van deze stippellijn noemen we $v$.

Nu geldt het volgende: $h = y_P = y_Q = y_R = \sin\beta$, $y_{P'} = \sin(\beta+\phi)$, $y_{Q'} = \sin(\beta-\phi)$, $y_{N'} = \cos\phi$. Voorts is $OR'/OS = \cos\phi$ dus $OS = h/\cos\phi$. Met de stelling van Pythagoras is dan $v$ te berekenen.

$$v^2 = 1 - OS^2 = 1 - h^2/\cos^2\phi$$

De volgende tabellen geven enkele relevante waarden voor evenaar $\beta = 0°$, keerkring $\beta = 23°$, poolcirkel $\beta = 67°$ en pool $\beta = 90°$.

$\phi = 0,\ \cos\phi = 1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\beta$ | 0 | 23° | 67° | 90° |
| $OS = \sin\beta$ | 0 | 0.39 | 0.92 | 1 |
| $v$ | 1 | 0.92 | 0.39 | 0 |

$\phi = 11°30',\ \cos\phi = 0.98$ :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\beta$ | 0 | 23° | 67° | 90° |
| $\sin\beta$ | 0 | 0.39 | 0.92 | 1 |
| $\sin(\beta+\phi)$ | 0.20 | 0.57 | 0.98 | 0.98 |
| $\sin(\beta-\phi)$ | $-.20$ | 0.20 | 0.82 | 0.98 |
| $OS$ | 0 | 0.40 | 0.94 | $*$ |
| $v$ | 1 | 0.92 | 0.17 | $*$ |

$\phi = 23°,\ \cos\phi = 0.92$ :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\beta$ | 0 | 23° | 67° | 90° |
| $\sin\beta$ | 0 | 0.39 | 0.92 | 1 |
| $\sin(\beta+\phi)$ | 0.39 | 0.72 | 1 | 0.92 |
| $\sin(\beta-\phi)$ | $-.39$ | 0 | 0.69 | 0.92 |
| $OS$ | 0 | 0.42 | 1 | $*$ |
| $v$ | 1 | 0.91 | 0 | $*$ |

Voor de vakken gemarkeerd met een ster (*) gaat voorgaande berekening niet op.

Lou de Boer, Rotterdam
Maart 2013